CHAPITRE 2

Intégration

I) Définition d'une intégrale

L'intégration est liée au problème du calcul d'une surface délimité par la courbe d'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ et les droites $x = a$, $x = b$ et $y = 0$.

L'une des méthodes consiste à :

1) divisé l'intervalle $[a, b]$ en n petits intervalles $[x_{k-1}, x_k]$ où :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, \dots, n$$

2) Calculer la surface du rectangle de cotés $[x_{k-1}, x_k]$ et $[x_k, f(x_k)]$ qui est égale à

$$(x_k - x_{k-1})\, f(x_k) = \frac{b-a}{n}\, f(x_k)$$

3) faire la somme (dite somme de Riemann) des surfaces de ces rectangles, qu'on note S_n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

4) Calculer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Définition.1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe, alors elle est égale à la surface délimité par la courbe de la fonction f définie sur le segment $[a, b]$ et les droites $x = a$, $x = b$ et $y = 0$.

On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ et on note

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_k)$$

par

$$\int_a^b f(x)dx,$$

qu'on lit l'intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)dx$.

Exemple.1. Calculer $\int_1^2 x dx$ par la somme de Riemann.

Exemple.2. Calculer $\int_0^1 x^2 dx$ par la somme de Riemann.

N.B. Plus de détails seront donnés pendant les séances du cours.

Propriétés de l'intégrale

Soient f, g des fonctions intégrables sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$. Alors on a :

1) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ (Relation de Chasles)

2) $\int_c^c f(t)dt = 0$

3) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

4) $\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

5) $\int_a^b [kf(t)]dt = k\int_a^b f(t)dt$ $(k \in \mathbb{R})$

II) Lien avec les primitives

Déf.2. On appelle primitive d'une fonction f définie sur le segment $[a, b]$, toute fonction F définie et dérivable sur $[a, b]$ telle que

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Remarque. Comme la dérivée des fonctions constantes est la fonction nulle, alors les constantes sont les primitives de la fonction nulle. Ceci nous ramène à dire que pour une fonction f de primitive F, la fonction $F + c$ (où c est une constante) est aussi une primitive de f et toutes les primitives de f sont de la forme $F + c$.

Exemple.3. La fonction $2x$ admet x^2 comme primitive et toutes ces primitives sont de la forme $x^2 + c$, où c est une constante.

Théorème.1. (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors,

1) la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en .

2) Pour toute primitive F de f on a :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

N.B. Plus de détails seront donnés pendant les séances du cours.

Remarque. Une primitive de f représentée par $\int f(x)dx$, appelée aussi une intégrale indéfinie de f, est une fonction. Par contre, la quantité $\int_a^b f(x)dx$ appelée une intégrale définie de f, est un nombre réel.

Exemple.4. Dans l'exemple.1 et l'exemple.2 on a vu que $\int_1^2 xdx = \frac{3}{2}$ et $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$. En utilisant les primitives on a :

Donc le calcul d'une intégrale passe par trouver une primitive. Dans ce qui suit on présente quelques techniques de calcul de primitives.

Intégration par partie.

Proposition. Pour deux fonctions u et v dérivables sur le segment $[a, b]$, on a :

1) $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$

2) $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

Ce résultat est une conséquence directe de la dérivée du produit de deux fonctions,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Exemple. 5. Calculer $\int \ln(x)\, dx$.

Changement de variable

Cette méthode consiste à poser $x = g(t)$ (une fonction de t) dans l'intégrale $\int f(x)\, dx$ et remplacer dx par $g'(t)dt$, c-àd,

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))\, g'(t)dt$$

Après calcul de l'intégrale à droite, le résultat est une fonction de t. Pour revenir à la variable x, on utilise la relation $x = g(t)$.

Remarque

Il y a un certain nombre de changements de variable classiques qu'il faut bien connaître, mais en dehors de ces cas, il est fréquent de tomber sur des cas particuliers où l'on doit, soi-même, déterminer le bon changement de variable à effectuer.

Exemple. 6. Calculer $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$ par le changement de variable $x = t^2$.

Quelques changements de variables classiques

Si l'intégrale est de la forme

1) $\int f(x, \sqrt{x})\, dx$ on pose $x = t^2$ et $dx = 2tdt$.

N.B. Plus de détails seront donnés pendant les séances du cours.

2) $\int f(e^x)\,dx$ on pose $t = e^x$ et $dx = \frac{dt}{t}$.

3) $\int f(\sin(x), \cos(x))\,dx$ on pose $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ et $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. On a aussi :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \ tg(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exemple. 7. Calculer $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Exemple. 8. Calculer $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$.

Exemple. 9. Calculer $\int \frac{1}{\cos(x)+1}dx$.

Intégrale d'une fraction rationnelle

Définition. Une fraction rationnelle (FR) est le rapport $\frac{p(x)}{q(x)}$ entre deux polynômes $p(x)$ et $q(x)(\not\equiv 0)$.

Définition. (Les fractions simples (FS))

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b\ , c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) la fraction $\frac{\alpha}{(ax+b)^n}$ est appelée fraction simple de première espèce (FS1).

2) la fraction $\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}$ avec $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$ est appelée fraction simple de deuxième espèce (FS2).

Théorème.1. Toute (FR) $Q(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où $degré(p) < degré(q)$ se décompose en somme de fractions simples.

Remarque. Si $degré(p) \geq degré(q)$ alors on fait la division euclidienne de $p(x)$ par $q(x)$ pour trouver que :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{S(x)q(x) + r(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

où $S(x)$ et $r(x)$ sont deux polynômes avec $degré(r) < degré(q)$. Ensuite, on applique le Théorème.1. à $\frac{r(x)}{q(x)}$.

Ainsi une (FR) se décompose en somme d'un polynôme et des (FS1) et (FS2). Donc pour calculer l'intégrale (FR) il suffit de connaitre les primitives des(FS1) et (FS2).

Intégrales des (FS)

Intégrale d'une (FS1)

N.B. Plus de détails seront donnés pendant les séances du cours.

$$\int \frac{\alpha}{(ax+b)^n}dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{a}\ln(ax+b) & si \;\; n=1 \\ \frac{\alpha}{a(-n+1)}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} & si\; n \neq 1 \end{cases}$$

Intégrale d'une (FS2)

Pour calculer $\int \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ (où $a \neq 0$ et $\Delta= b^2-4ac<0$) on pose $x=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t-\frac{b}{2a}$ et $dx=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}dt$ qui nous conduit à la recherche des primitives de

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} \quad et \;\; J_n = \int \frac{t}{(t^2+1)^n}dt\,.$$

Pour I_n on a : $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg(t)$ et si $n \geq 2$ une intégration par partie donne la relation de récurrence :

$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{t}{(t^2+1)^n}.$$

Pour J_n on a : $J_1 = \int \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C$ et si $n \geq 2$

$$J_n = \int \frac{t}{(t^2+1)^n}dt = \frac{1}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} + C$$

Exemple. 10. Calculer $\int \frac{1}{x^3-1}dx$.

Quelques primitives usuelles

1) $\int x^\alpha \, dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & si\; \alpha \neq -1 \\ \ln|x| & si\; \alpha = -1 \end{cases}$

2) $\int u' \, u^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} & si\; \alpha \neq -1 \\ \ln|u| & si\; \alpha = -1 \end{cases}$

3) $\int \frac{1}{x^2+1}dx = arctg(x)$

4) $\int \frac{u'}{u^2+1}dx = arctg(u)$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x)$

6) $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = arcsin(u)$

Définition

1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$

N.B. Plus de détails seront donnés pendant les séances du cours.

2) $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int_{t}^{a} f(x)dx$

3) Si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$ ou $f(b)$ est une (F.I), alors pour $a < b$ on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

et pour $b < a$

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{b+\varepsilon}^{a} f(x)dx$$

4) Si pour un $c \in [a, b]$ on a $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ ou $f(c)$ est une (F.I), alors on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right)$$

Exemple.11.

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+1} dx =$

2) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x} dx =$

3)

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx =$$

4) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx =$

N.B. Plus de détails seront donnés pendant les séances du cours.