Théorie des probabilités

Introduction on peut classer les expériences en deux grands groupes ; celles dont l'issue est prévue avec certitude dépendant de lois physiques établies et celles dont l'issue dépend du hasard, pour lesquelles on ne peut pas faire de prévisions rigoureuses, ce sont les expériences aléatoires.

Notion intuitive de probabilité historiquement, la notion de probabilité s'est dégagée à partir d'exemples simples empruntés généralement aux jeux de hasard.

Exemple jetons en l'air une pièce de monnaie, ce jeu constitue une épreuve c'est-à-dire une expérience dont le résultat est incertain. Il y a deux éventualités possibles ; pile ou face.

Si on considère l'éventualité « obtenir face », parmi les deux résultats également probables, il y en a qu'un qui est favorable à « obtention de face »

La probabilité d'avoir face est égale à $\frac{1}{2}$.

D'une façon plus générale ; s'il existe (n) éventualités s'excluant mutuellement et toutes également probable et si parmi celles-ci il y en a (k) favorables à un événement A, alors la probabilité est déterminée par

$$\mathrm{P(A)} = \frac{nombre\ d'éventualités\ favorables}{nombre\ d'éventualités\ possibles} = \frac{k}{n}$$

Exemples

1. On jette un dé, P(obtenir un nombre impaire)= $\frac{3}{6}$.

2. dans une urne, il y a 30 boules rouges, 20 boules noires, 10 boules vertes indiscernables au toucher et disposée au hasard. On tire une boule.

P(tirer une boule verte) = $\frac{10}{60}$

P(tirer une noire)= $\frac{20}{60}$

P(tirer une rouge) = $\frac{30}{60}$

Notions d'événements, d'univers

Une expérience aléatoire (épreuve) peut présenter un certain nombre de résultats fini ou infini.

Chacun de ces résultats est un événement élémentaire E_i.

L'ensemble de ces événements élémentaires constitue l'univers Ω; c'est l'ensemble de tous les résultats possibles.

Exemple jet de dé ; $\Omega=\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$

Un événement non élémentaire est un ensemble de plusieurs résultats

(une partie de Ω)

Exemple pour la même expérience aléatoire de jet de dé, on considère les événements :

« obtention de chiffre pair »; A={2,4,6}

« obtention de chiffre impair »; B={1,3,5}

A et B sont des événements non élémentaires.

Evénements incompatibles

Deux événements qui ne peuvent pas être réalisés en même temps sont dits incompatibles.

A et B incompatibles (s'excluent mutuellement) $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Logique des événements

- Evénement certain (contient tous les résultats de l'expérience) ; $E=\Omega$
- Evénement impossible (n'est jamais réalisé) ; $E=\emptyset$
- Union d'événements $A \cup B$ (A est réalisé ou B est réalisé)
- Intersection d'événements $A \cap B$ (A est réalisé et B est réalisé)
- Complémentarité $\overline{A}=C_A$ complémentaire de A (A n'est pas réalisé)

$\overline{A} \cup A=\Omega$, $\overline{A} \cap A=\emptyset$

A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

- Evénements exhaustifs : un ensemble d'événements A_i (i=1,…,n) vérifiant les propriétés suivantes

$$A_i \neq \emptyset, \qquad A_i \cap A_j=\emptyset, \qquad \cup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$$

forme un ensemble exhaustif (complet).

Des événements exhaustifs forment une partition de Ω.

A_1	A_2	…	A_n

Ω

Définition axiomatique

Soient deux événements A et B dans Ω;

Axiome 1 : $0 \leq P(A) \leq 1$

Axiome 2 : $P(\Omega)=1$

Axiome 3 : si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B)= P(A) + P(B)$

Conséquences

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A})=1-P(A)$

Théorème des probabilités totales :

il exprime la probabilité de réaliser A ou B ;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A et B sont incompatibles alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Application

On considère quatre événements exhaustifs A, B, C, D sur Ω ;

$$\Omega = A \cup B \cup C \cup D$$

Lesquelles des données suivantes respectent la définition axiomatique de probabilité ?

1) $P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$, $P(C)=1/4$, $p(D)=1/5$

2) $P(A)=1/2$, $P(B)=1/2$, $P(C)=-1/4$, $P(D)=1/4$

3) $P(A)=1/4$, $P(B)=1/4$, $p(C)=0$, $P(D)=1/2$

4) $P(A)=1/2$, $P(B)=1/8$, $P(C)=1/8$, $P(D)=1/4$

Réponses

1) $P(\Omega)>1$

2) $P(C) <0$

3) $P(C)=0$

4) données correctes ; $P(\Omega)= P(A)+P(B)+P(C)+ P(D)=1$

Exemple une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12, on tire au hasard une, calculer la probabilité de tirer un nombre pair ou un multiple de trois ?

Méthode

Exprimer les événements considérés

Remarquer le « ou » entre ces événements

Exposer le théorème des probabilités totales à utiliser

Poser la question de la compatibilité

A : « tirer un nombre pair » ={2,4,6,8,10,12}

B : « tirer un multiple de trois » = {3,6,9,12}

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \cap B = \{6,12\}$

$P(A\cup B) = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Probabilités conditionnelles

Considérons deux événements A et B, au cours d'une expérience aléatoire et telle que la réalisation de B influence celle de A. Alors la probabilité de réaliser A sachant que B a été réalisé s'appelle

Probabilité conditionnelle de A sachant B et s'écrit p(A/B).

Exemple introductif

La composition d'un amphithéâtre de 200 étudiants dans une université est la suivante :

130 étudiants sont des filles

100 étudiants habitent chez leurs familles

Parmi ces 100 étudiants qui habitent chez leurs familles, 80 sont des filles.

On choisit un étudiant au hasard et on s'intéresse aux trois événements

A : l'étudiant habite chez sa famille

B : l'étudiant est une fille.

$A\cap B$ est une fille qui habite chez sa famille.

$$P(A) = \frac{100}{200}, \qquad P(B) = \frac{130}{200},$$

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{80}{200}$ (nombre de filles qui habitent chez leurs parents/nombre d'étudiants)

Si l'on sait au préalable que l'étudiant est une fille, alors l'ensemble de référence est constitué de 130 filles étudiantes et la probabilité qu'elle habite chez ses parents sachant que c'est une fille devient $\frac{80}{130}$ (nombre de filles qui habitent chez leurs parents/nombre de filles étudiants)=P(A/B)

En effet : cette probabilité est conditionnée par l'information supplémentaire, l'événement B « l'étudiant est une fille » est réalisé.

On remarque que

$$\frac{80}{130} = \frac{80/200}{130/200} \text{ ce résultat est général}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilité que la fille n'habite pas chez ses parents sur l'ensemble des filles étudiantes est $\frac{50}{130}$ d'où

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

Exemple 2 soit une urne contenant 10 boules blanches, 20 rouges et 30 noires. On tire deux boules sans remise dans l'urne, quelle est la probabilité que la première boule soit rouge et la seconde blanche ?

Réponse

$$\mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(R) * \mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{R}) = \frac{20}{60} * \frac{10}{59} = \frac{10}{177}$$

P(B/R)= $\frac{10}{59}$ (il reste 59 boules dans l'urne dont 10 sont blanches)

Théorème des probabilités composées

P(A∩B)= P(B∩A)=P(A/B)*P(B)=P(B/A)*P(A)

Evénements indépendants

Il peut arriver que l'information apportée par la réalisation ou la non réalisation de B ne modifie pas la probabilité de réalisation de A soit P(A) ;

$$P(A/B) = P(A)$$

On dit que A et B sont indépendants et on a

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité ; si $P(A\cap B) \neq 0$ les deux événements sont compatibles, ils pourront être dépendants ou indépendants

Exemple les événements A et B décrivant la composition de l'amphithéâtre sont compatibles et dépendants

Exemple dans une population, la probabilité de naissance d'un garçon est 0.52. Dans cette population, 3% des filles et 2% de garçons présentent un ictère de nourrisson.

a) Quelle est la probabilité qu'un nouveau né présente un ictère ?

b) quelle est la probabilité qu'un nouveau né présentant un ictère soit une fille?

P(G)=0.52, P(F)=1-P(G)=0.48, P(I/F)=0.03, P(I/G)=0.02.

On demande de calculer P(I).

L'événement I est réalisé de deux façons par

E_1 : le nouveau né est une fille et elle présente un ictère ; $E_1=I\cap F$

E_2 : le nouveau né est un garçon et il présente un ictère ; $E_2=I\cap G$

Opération « ou » théorème des probabilités complètes.

Opération « et » théorème de probabilité composée.

$P(I)=P(E_1)+P(E_2)$

$P(E_1)=P(I\cap F)=P(F)P(I/F)$

$P(E_2)=P(I\cap G)=P(G)P(I/G)$

Alors $P(I)=0.48*0.03+0.52*0.02=0.0248$

b) on doit calculer P(F/I), on connait P(I/F), pour calculer ces probabilités conditionnelles on doit revenir au probabilités de l'intersection.

$$P(I \cap F) = P(F)P(I/F) = P(I)P(F/I)$$

D'où

$$\mathrm{P}(F/I) = \frac{\mathrm{P(F)P(I/F)}}{P(I)} = \frac{0.48 * 0.03}{0.0248}$$

$$P(F/I) = 0.581$$

Théorème de Bayes ou théorème de la probabilité des causes.

Si l'événement E est réalisé, cette réalisation pouvant être due à plusieurs causes C_1, C_2, …on dit que l'on inverse le conditionnement et l'on pose la question suivante : « sachant que E est réalisé, calculer la probabilité que ce soit à cause de C_1 (ou C_2…). Les différentes causes doivent former un système exhaustif.

Cas de deux causes soient deux causes possibles C_1 et C_2 telles que $C_2 = \bar{C}_1$

On applique le théorème de Bayes. On a

$$P(C_1 \cap E) = P(C_1)P(E/C_1) = P(E)P(C_1/E)$$

donc

$$\mathrm{P}(C1/E) = \frac{\mathrm{P(C1)p(E/C1)}}{P(E)}.$$

Comme

$$P(E) = P(C1)p(E/C1) + P(C2)p(E/C2)$$

On trouve

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{C1/E}) = \frac{\mathbf{P(C1)p(E/C1)}}{\mathbf{P(C1)p(E/C1) + P(C2)p(E/C2)}}$$

Généralisations à plusieurs causes

$$\mathbf{P}(\mathbf{Ci}/\boldsymbol{E}) = \frac{\mathbf{P(Ci)p(E/Ci)}}{\mathbf{P(C1)p}(\boldsymbol{E/C1}) + \cdots + \mathbf{P(Cn)p(E/Cn)}}$$

Exemple trois machines A, B, C produisent respectivement 40%, 35% et 25% du nombre total des comprimés fabriqués par un laboratoire pharmaceutique, chacune de ces machines produit respectivement 5%, 6% et 3%de comprimés défectueux.

a) on prend un comprimé au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il soit défectueux ?

b) on prend un comprimé au hasard, on constate qu'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il soit produit par la machine A?

Réponse

P(A)=0.4,   P(B)= 0.35,   P(C)=0.25

D : « comprimé défectueux »

P(D/A)=0.05, P(D/B)=0.06, P(D/C)=0.03

a) calcul P(D)

la réalisation de D peut être due à chacune des trois causes A, B, C, ces trois cause sont incompatibles ;

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)$$

$$=0.4*0.05+0.35*0.06+0.25*0.03$$

$$P(D)=0.0485$$

b) on sait que l'événement « comprimé défectueux » est réalisé, on cherche la probabilité de la cause « machine A », calcul de P(A/D)

$$\mathrm{P(A/D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.4*0.05}{0.0485} = 0.41$$

Exemple 2 un test diagnostique T pour une maladie M est appliqué à une population où 1% d'individus sont atteints par M. la probabilité que le test soit positif quand l'individu est malade est de 90% et la probabilité que le test soit négatif quand l'individu est non malade est de 95%.

a) Calculer la probabilité que le sujet soit malade quand le test est positif.

b) calculer la probabilité que le sujet soit non malade quand le test est négatif.

Réponse

P(M)=0.01

P(+/M)=0.9.

P(-/$\bar{M}$)=0.95

le test est intéressant si

$$P(M/+)>P(M) \quad \text{ou bien} \quad P(\bar{M}/-) > P(\bar{M})$$

a) on doit calculer P(M/+)

P(M∩+)=P(M/+)P(+)=P(+/M)P(M)

P(M/+)=$\frac{\mathrm{P(+/M)P(M)}}{\mathrm{P(+)}}$

On doit calculer P(+) : probabilité à priori d'avoir un test positif.

Ce résultat a deux causes.

- L'individu est malade : événement M
- l'événement est non malade : événement $\overline{M}$.

P(+)=P(M)P(+/M)+P($\overline{M}$)P(+/$\overline{M}$)

P($\overline{M}$)=1-P(M)=1-0.01=0.99

P(+/$\overline{M}$)+P(-/$\overline{M}$) $= 1$ d'où P(+/$\overline{M}$)=1- P(-/$\overline{M}$)=1-0.95=0.05

P(+)=0.01*0.9+0.99*0.05=0.0585

P(M/+)=$\frac{\mathrm{P(M)P(+/M)}}{P(+)}$ = $\frac{0.01*0.9}{0.0585}$ = 0.154

P(M/+)>P(M) : l'information apportée par le résultat du test est intéressant même si cette probabilité est faible

b) calcul de P($\overline{M}$/-)

P($\overline{M}$ ∩-)=P($\overline{M}$)P(-/$\overline{M}$)=P(-)P($\overline{M}$/-)

P($\overline{M}$/-)= $\frac{\mathrm{P(\overline{M})P(-/\overline{M})}}{P(-)}$

P(+)+P(-)=1

P(-)=1-P(+)= 1-0.0585 = 0.9415

P($\overline{M}$/-)= $\frac{0.99*0.95}{0.9415}$ = 0.999

On remarque que P($\overline{M}$/-) > P($\overline{M}$).

Variables aléatoires discrètes

Définition d'une variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire notée (v.a) est dite discrète si l'ensemble des réalisations possibles x_1, x_2,…x_n pour cette variable est fini ou dénombrable

Exemple 1 la variable Y associée à l'événement « un individu développe t-il une allergie » a deux réalisations possibles

« l'individu développe une allergie » codée généralement par 1 état associé au succès

« l'individu ne développe pas une allergie » codée par 0, état associé à l'échec.

Exemple 2 soit une famille de 4 enfants dont les parents sont porteurs d'un gène d'une maladie héréditaire. La variable aléatoire X : « nombre d'enfants atteints de cette maladie dans la famille » est discrète à cinq réalisations possibles X= 0, 1, 2, 3, 4.

Exemple 3 si on lance une pièce non truqué deux fois, le nombre de fois où pile est obtenue est une v.a prenant les valeurs 0,1,2.

Loi de probabilité

Définition à chacune des réalisations x_i de la variable aléatoire X est associé une probabilité $P(X= x_i)=p_i$ ($0 \leq p_i \leq 1, \forall$ i).

L'ensemble des couples (x_i, p_i) forme une loi de probabilité si la somme de toutes ces probabilités est égale à 1 ;

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = xi) = \sum_{i=1}^{n} p_i \text{ (cas fini)}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = xi) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \text{ (cas dénombrable)}$$

Une variable aléatoire discrète peut être résumée par un tableau

$X=x_i$	x_1	x_2	…	x_n	
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)=p_1$	$P(X=x_2)=p_2$	…	$P(X=x_n)=p_n$	$\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

Suite de l'exemple1 soit p la probabilité de développer une allergie à ce traitement st soit q=1-p la probabilité de ne pas développer une allergie.

P(Y=1)=p=0.1

P(Y=0)=q=1-p=0.9

$Y=y_i$	0	1	
$P(Y=y_i)=p_i$	0.9	0.1	1

Suite de l'exemple 2 soit p=1/4 la probabilité qu'un enfant soit atteint de cette maladie, indépendamment de son sexe.

la loi de probabilité de la variable X : « nombre d'enfants atteints dans la famille de 4 enfants » est donnée par le tableau suivant

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.316	0.422	0.047	0.004	1

Fonction de répartition

Définition la fonction de répartition associée à la variable aléatoire X est la fonction notée F ou F_x définie de R dans l'intervalle [0,1] par

$$F(x)= F_X(x)=P(X\leq x) = \sum_{xi\leq x} P(X = xi)$$

D'où

- si $x<x_i$ $F(x)=0$
- si $x_1 \leq x<x_2$ $F(x)=p_1$
- si $x_2\leq x<x_3$ $F(x)=p_1+p_2$

……

- si $x_{n-1}\leq x<x_n$ $F(x)= p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}$
- si $x_n \leq x$ $F(x)= p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n =1$

Représentation graphique sa représentation graphique est une fonction en escalier, chaque saut de la fonction de répartition a pour hauteur la dernière probabilité sommée. Elle est continue à droite en tout point mais discontinue à gauche en chacune des réalisations de la variable aléatoire x_i admettant une probabilité de réalisation non nulle.

Propriétés

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- Elle est croissante au sens large si $a \leq b$ alors $F(a) \leq F(b)$
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) =0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$

Suite d'exemple 1

On trace le graphe de F comme suit

- Si $y<0$, $F_Y(y)= P(Y\leq y)=0$
- Si $0\leq y<1$, $F_Y(y)= P(Y\leq y)=P(Y=0)=0.9$
- Si $y\geq 1$, $F_Y(y)= P(Y\leq y)= P(Y=0)+ P(Y=1) = 1$

Suite de l'exemple 2

- Si $x<0$, $F_X(x)=P(X\leq x)=0$
- Si $0\leq x<1$, $F_X(x)=P(X\leq x)=P(X=0)=0.316$
- Si $1\leq x<2$, $F_X(x)=P(X=0)+P(X=1)=0.316+0.422=0.738$
- Si $2\leq x<3$, $F_X(x)=P(X\leq 1)+P(X=2)= 0.949$
- Si $3\leq x<4$, $F_X(x)=P(X\leq 2)+P(X=3)=0.996$
- Si $x\geq 4$, $F_X(x)=P(X\leq 3)+P(X=4)=0.996+0.004=1$

Propriété

$$P(a\leq X \leq b)=F(b)-F(a)$$

Suite d'exemple 1

De la fonction de répartition ci-dessus, on peut déduire la probabilité de réalisation de l'événement « avoir au plus un enfant atteint »

$P(X\leq 1) = F_X(1)=0.738$

Ou l'événement « avoir au moins 3 enfants atteints »

$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-P(X\leq 2) =1-0.949=0.051$

Paramètres caractéristiques

Soit X une variable aléatoire à n réalisations possibles $x_1, x_2, . . ., x_n$.

Espérance mathématique

Définition l'espérance de la variable X, notée E(X) est la somme de toutes les réalisations pondérées par leurs probabilités respectives.

$$E(X)=\sum x_i P(X=x_i)= \sum x_i p_i$$

Suite de l'exemple 1

$E(Y)=0*P(Y=0)+1*P(Y=1)=0.1$

Suite de l'exemple 2

E(X) nombre moyen d'enfants atteints par la maladie

$E(X)=0*0.316+1*0.422+2*0.211+3*0.047+4*0.004=1$

Propriétés soient X et Y deux variables aléatoires.

- $E(a)=a$, $a\in R$
- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$, $\forall a, b \in R$

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- $E(X-Y)= E(X)-E(Y)$

On dit que l'espérance est un opérateur linéaire.

Propriété soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes

$E(XY)=E(X)*E(Y)$

Moments

On appelle moment d'ordre r $E(X^r)$;

$$E(X^r)= \sum x_i^r P(X=x_i)= \sum x_i^r p_i$$

Suite de l'exemple 1 $E(Y^2)= \sum y_i^r P(Y=y_i)=0^2*P(Y=0)+1^2*P(Y=1)=0.1$

Suite de lexemple 2 $E(X^2)=1.75$

Variance notée V(X)

$$V(X)=E(X-E(X))^2$$

$$= E(X^2)-(E(X))^2$$

Interprétation la variance est un indicateur de la dispersion d'une variable aléatoire autour de son espérance. Une variance est autant plus petite que les écarts à la moyenne sont faibles.

Suite de l'exemple 1 $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0.1-(0.1)^2=0.09$

Suite de l'exemple 2 $V(X)=0.75$

Propriétés

Soit X une variable aléatoire et a un réel

- $V(X)\geq 0$
- $V(a)=0$
- $V(ax)=a^2V(x)$
- $V(X+a)= v(X)$

Propriété si X et Y sont indépendantes alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$, la réciproque est fausse.

Ecart type noté σ(x),

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

l'écart type est un indicateur de dispersion da la variable aléatoire mais il a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que la variable aléatoire.

Suite de l'exemple 1 σ(Y)=0.3

Suite de l'exemple 2 σ(X)=0.866

Variable centrée réduite

Définition une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire dont l'espérance est nulle.

Propriété soit x une variable aléatoire, la variable Y=X-E(X) est une variable centrée ; E(Y)=0

Définition une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire dont l'écart type est égal à 1.

Propriétés

1. soit X une v.a, $\frac{X}{\sigma(X)}$ est réduite

2. soit X une v.a, $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

Principales lois de variables discrètes

Loi de Bernoulli

Définition soit une expérience aléatoire ayant deux résultats possibles

E={le succès} et $\bar{E}$ = {l'échec} avec P(E)=p, $0 \leq p \leq 1$, P($\bar{E}$)=1-p=q, $0 \leq q \leq 1$.

Cette épreuve élémentaire est appelée expérience de Bernoulli.

On lui associe une variable aléatoire discrète Y ayant deux réalisations possibles 0 état associé à un échec

1 état associé au succès

Paramètres caractéristiques : Y↪Bernoulli(p)

Réalisation	Y=0 ou 1
Probabilités	P(Y=1)=p P(Y=0)=q
Espérance mathématique	E(Y)=p
Variance	V(Y)=pq
Ecart type	σ(Y)=$\sqrt{pq}$

Suite de l'exemple 1 la v.a « avoir une allergie » suit une loi de Bernoulli de paramètre p=0.1 d'où E(Y)=0.1, V(Y)=0.09

La loi binomiale

Définition soient n v.a Y_i (i=1,…,n) de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p alors X=$\sum_{i=1}^{n} Y_i$ est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. on note X↪B(n,p).

Exemple Afin de vérifier la conformité d'un lot de comprimés, on prélève un échantillon de comprimés de taille n avec remise. Soit p la probabilité d'avoir un comprimé non conforme. D'où X la variable aléatoire discrète « nombre de comprimés non conformes dans un échantillon de n comprimés » X=0,1,…,n.

Y_i : la variable aléatoire associé à l'épreuve « le i ^{ème} comprimé est il défectueux » ; Y_i↪B(p)

X : le nombre de comprimés non conformes ; X=$\sum_{i=1}^{n} Y_i$

X↪ B(n,p)

D'une façon générale la loi binomiale est utilisée dès qu'il s'agit d'un décompte de succès parmi n épreuves répétées, identiques et indépendantes (même probabilité de succès) à deux issues seulement : succès et échec.

Paramètres caractéristiques X $\hookrightarrow$ B(n,p), $0 \leq p \leq 1$

Réalisations	X=0,1,2,…,n
probabilités	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
Espérance mathématique	E(X)=np
Variance	V(X)=np(1-p)
Ecart type	$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Suite de l'exemple 2

Soit la variable aléatoire X : « nombre d'enfants atteints par une maladie héréditaire dans une famille de 4 enfants ».

$X \hookrightarrow B(n=4,p=1/4)$

E(X)=np=4*1/4=1

V(X)=np(1-p)=3/4=0.75

On peut calculer les différentes probabilités ;

$P(X=0)=C_4^0(1/4)^0(1-1/4)^4=0.316$

$P(X=1)= C_4^1(1/4)^1(1-1/4)^3=0.422$

$P(X=2)= C_4^2(1/4)^2(1-1/4)^2=0.211$

$P(X=3)= C_4^3(1/4)^3(1-1/4)=0.047$

$P(X=4)= C_4^4(1/4)^4(1-1/4)^0=0.004$.

La loi de Poisson

Définition on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre réel positif λ, notée $X \hookrightarrow P(\lambda)$ si elle prend des valeurs entières.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

La loi de Poisson permet de modéliser des comptages d'événements rares c'est-à-dire des événements ayant une faible probabilité de réalisation, maladies rares, accidents mortels rares, pannes, radioactivité…

Variables aléatoires continues

1 Définition d'une variable aléatoire continue

Définition une variable aléatoire est dite continue si son domaine de variation est l'ensemble $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple le poids d'un individu est une variable aléatoire qui peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}^+$.

Fonction de répartition

Définition une variable aléatoire continue peut être défini par sa fonction de répartition F ou F_X, définie par

$$F(x)=P(X\leq x)$$

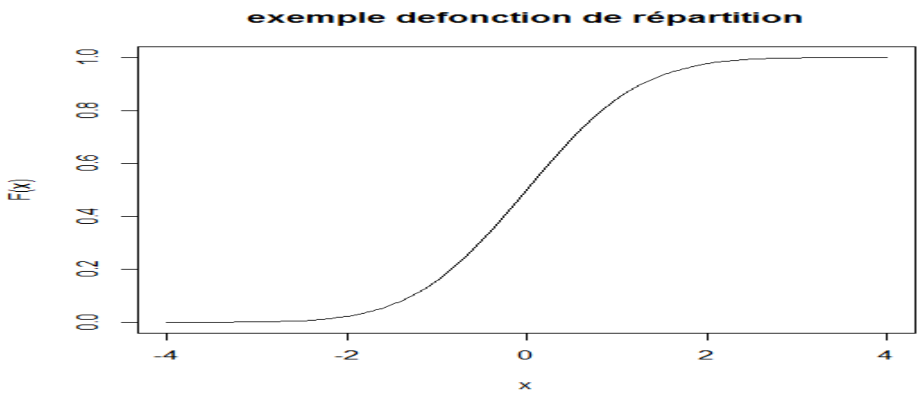
Propriétés

La fonction de répartition F est d'une v.a continue a les propriétés suivantes :

- continue
- Croissante au sens large ; $x\leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
- $\lim_{x\mapsto-\infty} F(x)=0,\quad \lim_{x\mapsto+\infty} F(x)=1$

$\forall x\in \mathbb{R} \quad 0 \leq F(x) \leq 1.$

Exemple 1



Exemple 2

La fonction F définie par

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ x & si\ 0\le x\le 1 \\ 1 & si\quad x>1 \end{cases}$$

F ainsi défini remplit les conditions d'une fonction de répartition d'une v.a.

Application

$$P(x\le X\le y)=F(y)-F(x)$$

Suite de l'exemple 2

Pour la fonction définie dans l'exemple 2 on a

$P(0.3 \le X \le 0.8)$= f(0.8)-F(0.3)=0.8-0.3=0.5

Fonction de densité de probabilité

Définition la fonction f(x)=F′(x) où F la fonction de répartition d'une v.a continue X est appelée fonction de densité de probabilité de la v.a continue X.

Propriétés

La fonction de densité de probabilité f d'une v.a continue a les propriétés suivantes :

- $\forall$ x, f(x)≥ 0
- f est une fonction intégrable et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)$ =1.

Exemple 3 Suite de l'exemple 2 la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire décrite par la fonction de répartition de l'exemple 2est

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ 1 & si\ 0\le x\le 1 \\ 0 & si\ x>1 \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)$ dx=1.

Cette fonction décrit une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs réelles comprises entre 0 et 1.

A partir de la fonction de densité f(x) on peut calculer la fonction de répartition

F(x)= $\int_{-\infty}^{x} f(t)$dt

F(x) correspond à l'aire sous la courbe de la fonction de densité de probabilité de f de -∞ à x

2.Paramètres caractéristiques d'une variable aléatoire continue

Espérance l'espérance d'une variable aléatoire continue X de densité de probabilité f est donnée par

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

si cette intégrale existe.

Variable aléatoire continue centrée

Une variable aléatoire est dite centrée si son espérance est nulle ; $E(X)=0$

La variable aléatoire $X-E(X)$ est centrée quelque soit la v.a X.

Moments

Le moment d'ordre r d'une variable aléatoire continue est défini par

$E(X^r)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$

$E(X)$ est le moment d'ordre 1.

Variance

$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^2 f(x)\,dx$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

Ecart type

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

exemple 4 les paramètres caractéristiques de la variable aléatoire continue X de l'exemple 3 sont

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=0.5$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx-0.5^2=1/12=0.0833$

$\sigma(X)=0.289$

3.Propriétés des paramètres d'une variable aléatoire continue

X_1, X_2 deux variables aléatoires continues et a une constante

Propriétés de l'espérance

- $E(X+a)=E(X)+a$
- $E(a.X)=aE(X)$
- $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$
- $E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)$

Propriétés de la variance

- $V(X+a)=V(X)$
- $V(aX)=a^2V(X)$
- si X_1 et X_2 sont indépendantes on a

$V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)$

4. Principales lois d'une variable aléatoire continue

Loi uniforme

La distribution est la loi la plus simple loi de variable aléatoire continue

Définition la fonction de densité de probabilité d'une loi uniforme sur l'intervalle [a, b], a<b est définie par

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si\ \ x < a \\ \frac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & si\ x > b \end{cases}$$

la fonction de répartition F associée à une distribution uniforme

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ \ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x > b \end{cases}$$

Les paramètres caractéristiques :

$E(X)= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

$= \frac{a+b}{2}$

$V(X)= \frac{(b-a)^2}{12}$

Loi normale

La loi normale est la loi de probabilité la plus courante pour les variables aléatoire continues. Une grandeur influencée par un grand nombre de paramètres indépendants peut souvent être assimilée à une variable aléatoire continue suivant une loi normale.

Une loi normale est entièrement définie par son espérance μ et son écart type σ, on note alors N(μ, σ).

Définition la fonction de densité de probabilité d'une loi normale N(μ, σ)est définie par

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right),\quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}$$

La fonction de répartition F de la loi normale est donnée par

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dt$$

Représentation graphique

La fonction densité de probabilité suit une courbe en cloche, appelée gaussienne symétrique par rapport à la moyenne μ tandis que la fonction de répartition suit une courbe ayant la forme d'un S.

Table de la loi normale centrée réduite

Dans la pratique, on rencontre très souvent la loi normale. Afin d'éviter le calcul numérique de sa fonction de répartition pour chaque application, on utilise la loi normale centrée réduite dont les valeurs sont tabulées.

On utilise à la place de la variable aléatoire continue X, la la variable aléatoire continue centrée réduite notée habituellement U.