Théorie des probabilités

Introduction on peut classer les expériences en deux grands groupes ; celles dont l'issue est prévue avec certitude dépendant de lois physiques établies et celles dont l'issue dépend du hasard, pour lesquelles on ne peut pas faire de prévisions rigoureuses, ce sont les expériences aléatoires.

Notion intuitive de probabilité historiquement, la notion de probabilité s'est dégagée à partir d'exemples simples empruntés généralement aux jeux de hasard.

Exemple

Jetons en l'air une pièce de monnaie, ce jeu constitue une épreuve c'est-à-dire une expérience dont le résultat est incertain. Il y a deux éventualités possibles ; pile ou face.

Si on considère l'éventualité « obtenir face », parmi les deux résultats également probables, il y en a qu'un qui est favorable à « obtention de face »

La probabilité d'avoir face est égale à $\frac{1}{2}$.

D'une façon plus générale ; s'il existe (n) éventualités s'excluant mutuellement et toutes également probable et si parmi celles-ci il y en a (k) favorables à un événement A, alors la probabilité est déterminée par

$$\mathrm{P(A)} = \frac{nombre\ d'éventualités\ favorables}{nombre\ d'éventualités\ possibles} = \frac{k}{n}$$

Exemples……………….

Notions d'événements, d'univers

une expérience aléatoire (épreuve) peut présenter un certain nombre de résultats fini ou infini. Chacun de ces résultats est un événement élémentaire E_i. L'ensemble de ces événements élémentaires constitue l'univers Ω; c'est l'ensemble de tous les résultats possibles.

Exemple jet de dé ; $\Omega=\{ E_1, E_2, \ldots, E_n\}$

Un événement non élémentaire est un ensemble de plusieurs résultats (une partie de Ω)

Exemple ………………

Evénements incompatibles

Deux événements qui ne peuvent pas être réalisés en même temps sont dits incompatibles.

A et B incompatibles (s’excluent mutuellement) $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Logique des événements

- Evénement certain (contient tous les résultats de l’expérience) ; $E = \Omega$
- Evénement impossible (n’est jamais réalisé) ; $E = \emptyset$
- Union d’événements $A \cup B$ (A est réalisé ou B est réalisé)
- Intersection d’événements $A \cap B$ (A est réalisé et B est réalisé)
- Complémentarité $\overline{A} = C_A$ complémentaire de A (A n’est pas réalisé)

$\overline{A} \cup A = \Omega$, $\overline{A} \cap A = \emptyset$

A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

- Evénements exhaustifs : un ensemble d’événements A_i (i=1,…,n) vérifiant les propriétés suivantes

$$A_i \neq \emptyset, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

forme un ensemble exhaustif (complet).

Des événements exhaustifs forment une partition de Ω.

A_1	A_2	…	A_n

Ω

Définition axiomatique

Soient deux événements A et B dans Ω;

Axiome 1 : $0 \leq P(A) \leq 1$

Axiome 2 : $P(\Omega) = 1$

Axiome 3 : si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Conséquences

- P($\emptyset$) $= 0$
- P($\bar{A}$)=1-P(A)

Théorème des probabilités totales : il exprime la probabilité de réaliser A ou B ;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A et B sont incompatibles alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemple

On considère quatre événements exhaustifs A, B, C, D sur Ω ;

$$\Omega = A \cup B \cup C \cup D$$

Lesquelles des données suivantes respectent la définition axiomatique de probabilité ?

1) P(A)=1/2, P(B)=1/3, P(C)=1/4, p(D)=1/5

2) P(A)=1/2, P(B)=1/2, P(C)=-1/4, P(D)=1/4

3) P(A)=1/4, P(B)=1/4, p(C)=0, P(D)=1/2

4) P(A)=1/2, P(B)=1/8, P(C)=1/8, P(d)=1/4

Réponses

1) P(Ω)>1

2) P(C) <0

3) P(C)=0

4) données correctes ; P(Ω)= P(A)+P(B)+P(C)+ P(D)=1

Exemple …………….

Probabilités conditionnelles

Considérons deux événements A et B, au cours d'une expérience aléatoire et telle que la réalisation de B influence celle de A. Alors la probabilité de réaliser A sachant que B a été réalisé s'appelle

Probabilité conditionnelle de A sachant B et s'écrit p(A/B).

Exemple introductif

La composition d'un amphithéâtre de 200 étudiants dans une université est la suivante :

130 étudiants sont des filles

100 étudiants habitent chez leurs familles

Parmi ces 100 étudiants qui habitent chez leurs familles, 80 sont des filles.

On choisit un étudiant au hasard et on s'intéresse aux trois événements

A : l'étudiant habite chez sa famille

B : l'étudiant est une fille.

A∩B est une fille qui habite chez sa famille.

$$P(A) = \frac{100}{200}, \qquad P(B) = \frac{130}{200},$$

$P(A \cap B) = \frac{80}{200}$ (nombre de filles qui habitent chez leurs parents/nombre d'étudiants)

Si l'on sait au préalable que l'étudiant est une fille, alors l'ensemble de référence est constitué de 130 filles étudiantes et la probabilité qu'elle habite chez ses parents sachant que c'est une fille devient $\frac{80}{130}$(nombre de filles qui habitent chez leurs parents/nombre de filles étudiants)=P(A/B)

En effet : cette probabilité est conditionnée par l'information supplémentaire, l'événement B « l'étudiant est une fille » est réalisé.

On remarque que

$\frac{8\ 0}{13\ 0}=\frac{8\ 0/200}{13\ 0/200}$ ce résultat est général

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

La probabilité que la fille n'habite pas chez ses parents sur l'ensemble des filles étudiantes est $\frac{5\ 0}{13\ 0}$d'où

$$P(\bar{A}/B)=1-P(A/B)$$

Exemple 2 …….

Théorème des probabilités composées

P(A∩B)= P(B∩A)=P(A/B)*P(B)=P(B/A)*P(A)

Evénements indépendants

Il peut arriver que l'information apportée par la réalisation ou la non réalisation de B ne modifie pas la probabilité de réalisation de A soit P(A) ;

$$P(A/B)=P(A)$$

On dit que A et B sont indépendants et on a

$$P(A\cap B)=P(A)*P(B)$$

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité ; si P(A∩B)≠ 0 les deux événements sont compatibles, ils pourront être dépendants ou indépendants

Exemple les événements A et B décrivant la composition de l'amphithéâtre sont compatibles et dépendants

Exemple …………….

Théorème de Bayes ou théorème de la probabilité des causes.

Si l'événement E est réalisé, cette réalisation pouvant être due à plusieurs causes C_1, C_2, …on dit que l'on inverse le conditionnement et l'on pose la question suivante : « sachant que E est réalisé, calculer la probabilité que ce soit à cause de C_1 (ou C_2…). Les différentes causes doivent former un système exhaustif.

$$\mathbf{P(Ci/\mathit{E}) = \frac{P(Ci)p(E/Ci)}{P(C1)p(\mathit{E}/\mathit{C}1) + \cdots + P(Cn)p(E/Cn)}}$$

Cas de deux causes soient deux causes possibles C_1 et C_2 telles que $C_2 = \overline{C}_1$

On applique le théorème de Bayes. On a

$$P(C_1 \cap E) = P(C_1)P(E/C_1) = P(E\ )P(C_1/E)$$

donc

$$\mathrm{P}(C1/E) = \frac{\mathrm{P(C1)p(E/C1)}}{P(E)}.$$

Comme

$$P(E) = P(C1)p(E/C1) + P(C2)p(E/C2)$$

On trouve

$$\mathbf{P(\mathit{C}1/\mathit{E}) = \frac{P(C1)p(E/C1)}{P(C1)p(E/C1) + P(C2)p(E/C2)}}$$

Généralisations à plusieurs causes

Exemple 1

Trois machines A, B, C produisent respectivement 40%, 35% et 25% du nombre total des comprimés fabriqués par un laboratoire pharmaceutique, chacune de ces machines produit respectivement 5%, 6% et 3%de comprimés défectueux.

a) on prend un comprimé au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il soit défectueux ?

b) on prend un comprimé au hasard, on constate qu'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il soit produit par la machine A?

Réponse ………………

Exemple 2 un test diagnostique T pour une maladie M est appliqué à une population où 1% d'individus sont atteints par M. la probabilité que le test soit positif quand l'individu est malade est de 90% et la probabilité que le test soit négatif quand l'individu est non malade est de 95%.

a) Calculer la probabilité que le sujet soit malade quand le test est positif.

b) calculer la probabilité que le sujet soit non malade quand le test est négatif.

Réponse ………………..