Chapitre 2

Variables aléatoires

Variables aléatoires discrètes

Définition Une variable aléatoire notée (v.a) est dite discrète si l'ensemble des réalisations possibles x_1, x_2,…x_n pour cette variable est fini ou dénombrable.

Exemple 1 La variable Y associée à l'événement « un individu développe t-il une allergie » a deux réalisations possibles

«L'individu développe une allergie » codée généralement par 1 état associé au succès

«L'individu ne développe pas une allergie » codée par 0, état associé à l'échec.

Exemple 2 Soit une famille de 4 enfants dont les parents sont porteurs d'un gène d'une maladie héréditaire. La variable aléatoire X : « nombre d'enfants atteints de cette maladie dans la famille » est discrète à cinq réalisations possibles X= 0, 1, 2, 3, 4.

Exemple 3 Si on lance une pièce non truqué deux fois, le nombre de fois où pile est obtenue est une v.a prenant les valeurs 0,1,2.

Loi de probabilité

Définition à chacune des réalisations x_i de la variable aléatoire X est associé une probabilité $P(X= x_i)=p_i$ ($0 \leq p_i \leq 1, \forall i$).

L'ensemble des couples (x_i, p_i) forme une loi de probabilité si la somme de toutes ces probabilités est égale à 1 ;

$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}i) = \sum_{i=1}^{n} p_i$ (cas fini)

$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i$ (cas dénombrable)

Une variable aléatoire discrète peut être résumée par un tableau

$X=x_i$	**x_1**	**x_2**	**…**	**x_n**
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)=p_1$	$p(X=x_2)=p_2$	…	$p(X=x_n)=p_n$

Suite de l'exemple1 Soit p la probabilité de développer une allergie à ce traitement et soit q=1-p la probabilité de ne pas développer une allergie.

P(Y=1)=p=0.1

P(Y=0)=q=1-p=0.9

$Y=y_i$	0	1	
$P(Y=y_i)=p_i$	0.9	0.1	1

Suite de l'exemple 2 Soit p=1/4 la probabilité qu'un enfant soit atteint de cette maladie, indépendamment de son sexe. La loi de probabilité de la variable X : « nombre d'enfants atteints dans la famille de 4 enfants » est donnée par le tableau suivant

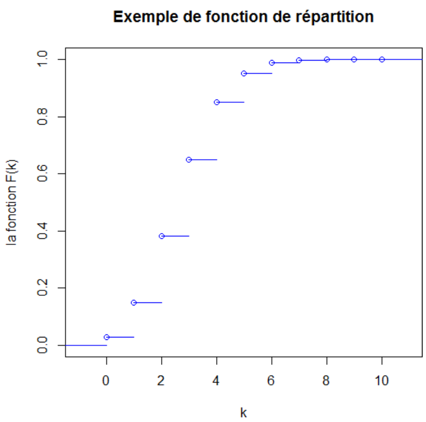
x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p_i	0.316	0.422	0.211	0.047	0.004

Fonction de répartition

Définition La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X est la fonction notée F ou F_x définie de R dans l'intervalle [0,1] par

$F(x)= F_X(x)=P(X\leq x) = \sum_{xi\leq x} P(X = xi)$

Représentation graphique Sa représentation graphique est une fonction en escalier, chaque saut de la fonction de répartition a pour hauteur la dernière probabilité sommée

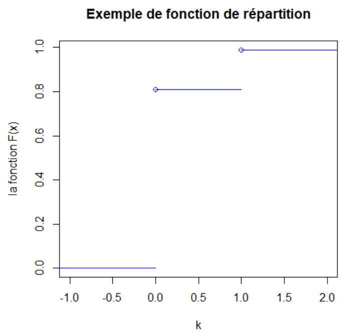


Propriétés

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- Elle est croissante au sens large si a $\leq$ b alors F(a) $\leq$ F(b)
- $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ =0, $\lim_{x\to+\infty}$ F(x)=1

Suite de l'exemple 1 On trace le graphe de F comme suit

- Si y<0 , $F_Y(y)= P(Y\leq y)=0$
- Si $0\leq y<1$, $F_Y(y)= P(Y\leq y)=P(Y=0)=0.9$
- Si $y\geq 1$, $F_Y(y)= P(Y\leq y)= P(Y=0)+ P(Y=1) = 1$



Propriété

P(a$\leq X \leq b$)=F(b)-F(a)

Principales lois de variables discrètes

Loi de Bernoulli

Définition Soit une expérience aléatoire ayant deux résultats possibles

E={le succès} et $\bar{E}$ = {l'échec} avec P(E)=p, 0≤p≤1, P($\bar{E}$)=1-p=q, 0≤q≤1.

- Cette épreuve élémentaire est appelée expérience de Bernoulli.
- On lui associe une variable aléatoire discrète Y ayant deux réalisations possibles 0 état associé à un échec, 1 état associé au succès
- Paramètres caractéristiques : Y↪Bernoulli(p)

Réalisation	Y=0 ou 1
Probabilités	P(Y=1)=p P(Y=0)=q
Espérance mathématique	E(Y)=p
Variance	V(Y)=pq
Ecart type	σ(Y)=$\sqrt{pq}$

- **Suite de l'exemple 1** La v.a « avoir une allergie » suit une loi de Bernoulli de paramètre p=0.1 d'où E(Y)=0.1, V(Y)=0.09

La loi binomiale

Définition soient n v.a Y_i (i=1,…,n) de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p alors X=$\sum_{i=1}^{n} Y_i$ est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. on note X↪B(n,p).

D'une façon générale la loi binomiale est utilisée dès qu'il s'agit d'un décompte de succès parmi n épreuves répétées, identiques et indépendantes (même probabilité de succès) à deux issues seulement : succès et échec.

Paramètres caractéristiques $X \hookrightarrow B(n,p)$, $0 \leq p \leq 1$

Réalisations	X=0,1,2,…,n
Probabilités	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
Espérance mathématique	E(X)=np
Variance	V(X)=np(1-p)
Ecart type	$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Suite de l'exemple 2 Soit la variable aléatoire X : « nombre d'enfants atteints par une maladie héréditaire dans une famille de 4 enfants ».

$X \hookrightarrow B(n=4,p=1/4)$

E(X)=np=4*1/4=1

V(X)=np(1-p)=3/4=0.75

On peut calculer les différentes probabilités ;

$P(X=0)=C_4^0(1/4)^0(1-1/4)^4=0.316$

$P(X=1)= C_4^1(1/4)^1(1-1/4)^3=0.422$

$P(X=2)= C_4^2(1/4)^2(1-1/4)^2=0.211$

$P(X=3)= C_4^3(1/4)^3(1-1/4)=0.047$

$P(X=4)= C_4^4(1/4)^4(1-1/4)^0=0.004$.

La loi de Poisson

Définition on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre réel positif λ, notée $X \hookrightarrow P(\lambda)$ si elle prend des valeurs entières.

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)$$

La loi de Poisson permet de modéliser des comptages d'événements rares c'est-à-dire des événements ayant une faible probabilité de réalisation, maladies rares, accidents mortels rares, pannes, radioactivité…

Moyenne et variance

$E(X)=V(X)= \lambda$

Exemple

Une société constate en moyenne trois accidents de travail par an. L'effectif est relativement élevé, on considère que le nombre d'accidents suit une loi de Poisson.

Quelle est la probabilité que plus de quatre accidents surviennent dans l'année ?

Réponse

X$\hookrightarrow P$(λ), $\lambda = 3$

P(X>4)= $1 - P(X \leq 4)$

=1- [P(X=0)+ P(X=1)+ P(X=2)+ P(X= 3)+ P(X=4)]

=1-[0.0498+0.1494+0.2240+0.2240+0.1680]

=1- 0.8153

=0.1847