CHAPITRE 2

Intégration

L'intégration est liée au problème du calcul d'une surface délimité par la courbe d'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ et les droites $x = a,\ x = b$ et $y = 0$.

Ces surfaces se calculent en utilisant les primitives.

Déf.1. On appelle **primitive** d'une fonction f définie sur le segment $[a, b]$, toute fonction F définie et dérivable sur $[a, b]$ telle que

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b].$$

On écrit aussi

$$F(x) = \int f(x)dx$$

appelée une intégrale indéfinie de f.

La quantité $\int_a^b f(x)dx$ définie par

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

est appelée une intégrale définie de f. Elle donne la surface délimitée par la courbe de f définie sur un segment $[a, b]$ et les droites $x = a,\ x = b$ et $y = 0$.

Remarque. Comme la dérivée des fonctions constantes est la fonction nulle, alors les constantes sont les primitives de la fonction nulle. Ceci nous ramène à dire que pour une fonction f de primitive F, la fonction $F + c$ (où c est une constante) est aussi une primitive de f et toutes les primitives de f sont de la forme $F + c$.

Exemple.3. La fonction $2x$ admet x^2 comme primitive et toutes ces primitives sont de la forme $x^2 + c$, où c est une constante.

Exemple.4. En utilisant les primitives on a :

$$\int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Propriétés de l'intégrale

Soient f, g des fonctions intégrables sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$. Alors on a :

1) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ (Relation de Chasles)

2) $\int_c^c f(t)dt = 0$

3) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

4) $\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

5) $\int_a^b [kf(t)]dt = k\int_a^b f(t)dt \qquad (k \in \mathbb{R})$

Dans ce qui suit on présente quelques techniques de calcul de primitives.

Intégration par partie.

Proposition. Pour deux fonctions u et v dérivables sur le segment $[a, b]$, on a :

1) $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$

2) $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

Ce résultat est une conséquence directe de la dérivée du produit de deux fonctions,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Exemple. 5. Calculer $\int \ln(x)\, dx$.

On prend $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$. Donc $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Ceci nous conduit à écrire

$$\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int dx$$

$$= x\ln(x) - x + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Changement de variable

Cette méthode consiste à poser $x = g(t)$ (une fonction de t) dans l'intégrale $\int f(x)\, dx$ et remplacer dx par $g'(t)dt$, c-àd,

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))\, g'(t)dt$$

Après calcul de l'intégrale à droite, le résultat est une fonction de t. Pour revenir à la variable x, on utilise la relation $x = g(t)$.

Remarque

Il y a un certain nombre de changements de variables classiques qu'il faut bien connaître, mais en dehors de ces cas, il est fréquent de tomber sur des cas particuliers où l'on doit, soi-même, déterminer le bon changement de variable à effectuer.

Exemple. 6. Calculer

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$$

par le changement de variable $x = t^2$.

On commence par trouver l'intégrale indéfinie $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$.

On a $dx = 2tdt$. Donc,

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}2tdt = 2\int \frac{1}{t+1}dt = 2\ln(t+1) + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

Maintenant, on calcul l'intégrale définie donné au début,

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \left[2\ln(\sqrt{x}+1)\right]_1^4 = 2\ln(\sqrt{4}+1) - 2\ln(\sqrt{1}+1) = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Quelques changements de variables classiques

Si l'intégrale est de la forme

1) $\int f(x,\sqrt{x})\,dx$ on pose $x = t^2$ et $dx = 2tdt$.

2) $\int f(e^x)\,dx$ on pose $t = e^x$ et $dx = \frac{dt}{t}$.

3) $\int f(\sin(x),\cos(x))\,dx$ on pose $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ et $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

On a aussi :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad tg(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exemple. 7. Calculer $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

On pose $x = t^2$ et $dx = 2tdt$. Donc

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^t}{t}2tdt = 2\int e^t\,dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Exemple. 8. Calculer $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$.

On pose $t = e^x$ et $dx = \frac{dt}{t}$ pour trouver que

$$\int \frac{e^x}{e^x+2}dx = \int \frac{t}{t+2}\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t+2}dt = \ln(t+2) + C = \ln(e^x+2) + C.$$

Exemple. 9. Calculer $\int \frac{1}{\cos(x)+1}dx$.

Avec le changement $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ on obtient

$$\int \frac{1}{\cos(x)+1}dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{2}{1+t^2}dt = \int 1dt = t + C = tg\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Intégrale d'une fraction rationnelle

Définition. Une fraction rationnelle (FR) est le rapport $\frac{p(x)}{q(x)}$ entre deux polynômes $p(x)$ et $q(x)(\not\equiv 0)$.

Définition. (Les fractions simples (FS))

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) la fraction

$$\frac{\alpha}{(ax+b)^n}$$

est appelée fraction simple de première espèce (FS1).

2) la fraction

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n} \quad \text{avec } a \neq 0 \text{ et } b^2-4ac<0$$

est appelée fraction simple de deuxième espèce (FS2).

Théorème.1. Toute (FR) $Q(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où $degré(p) < degré(q)$ se décompose en somme de fractions simples.

Remarque. Si $degré(p) \geq degré(q)$ alors on fait la division euclidienne de $p(x)$ par $q(x)$ pour trouver que :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{S(x)q(x)+r(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

où $S(x)$ et $r(x)$ sont deux polynômes avec

$degré(r) < degré(q)$. Ensuite, on applique le Théorème.1. à $\frac{r(x)}{q(x)}$.

Ainsi une (FR) se décompose en somme d'un polynôme et des (FS1) et (FS2). Donc pour calculer l'intégrale (FR) il suffit de connaitre les primitives des(FS1) et (FS2).

Intégrales des (FS)

Intégrale d'une (FS1)

$$\int \frac{\alpha}{(ax+b)^n}dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{a}\ln(ax+b) & si \quad n=1 \\ \frac{\alpha}{a(-n+1)}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} & si\ n \neq 1 \end{cases}$$

Intégrale d'une (FS2)

Pour calculer

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}dx \quad (\text{où } a \neq 0 \text{ et } \Delta = b^2-4ac<0)$$

on pose $x = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t - \frac{b}{2a}$ et $dx = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}dt$

Exemple. 10. Calculer

$$\int \frac{1}{x^3-1}dx.$$

On a :

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}$$

Qui donne $1 = \alpha(x^2+x+1) + (x-1)(\beta x+\gamma)$. D'où

Si $x = 1 : \alpha = \frac{1}{3}$

Si $x = 0 : \gamma = -\frac{2}{3}$

Si $x = -1 : 1 = \alpha + (-2)(-\beta+\gamma) \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$.

Alors

$$\int \frac{1}{x^3-1}dx = \int \frac{\alpha}{x-1}dx + \int \frac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}dx$$

$\frac{\alpha}{x-1}$ est une (FS1), donc:

$$\int \frac{\alpha}{x-1}dx = \frac{1}{3}\ln(x-1) + C$$

$\frac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}$ est une (FS2) où $\Delta = b^2-4ac = -3 < 0$,

donc en posant $x = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t - \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}$ et $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$ on obtient :

$$\int \frac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\frac{-1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}\right)+\frac{-2}{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}\right)+1}\frac{\sqrt{3}}{2}dt$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{9}\int \frac{(\sqrt{3}t+3)}{t^2+1}dt = -\frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2+1}dt - \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$= -\frac{1}{6}\ln(t^2+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}arctg(t) + C.$$

Quelques primitives usuelles

1) $\int x^\alpha\, dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & si\ \alpha \neq -1 \\ \ln|x| & si\ \alpha = -1 \end{cases}$

2) $\int u'\, u^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} & si\ \alpha \neq -1 \\ \ln|u| & si\ \alpha = -1 \end{cases}$

3) $\int \frac{1}{x^2+1}dx = arctg(x)$

4) $\int \frac{u'}{u^2+1}dx = arctg(u)$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x)$

6) $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = arcsin(u)$

Définition

1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$

2) $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx$

3) Si $\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$ ou $f(b)$ est une (F.I), alors pour $a < b$ on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

et pour $b < a$

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{b+\varepsilon}^a f(x)dx$$

4) Si pour un $c \in [a, b]$ on a $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ ou $f(c)$ est une (F.I), alors on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

Exemple.11.

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \to +\infty} [arctg(x)]_0^t$

$$= \lim_{t \to +\infty} arctg(t) = \frac{\pi}{2}.$$

2) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to -\infty} [\ln|x|]_t^{-1}$

$$= \lim_{t \to -\infty} -\ln|t| = -\infty.$$

3)

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ln|x|]_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{t \to 0^+} \ln|\varepsilon| = -\infty$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ln|x|]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln|\varepsilon| = +\infty$$

4)

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x-1)^2} dx \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^{1-\varepsilon} + \left[\frac{-1}{x-1}\right]_{1+\varepsilon}^{2} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{2}{\varepsilon} - 2 \right) = +\infty.$$