Fiche de TD N°1

Exercice 1. Soient les polynômes $p(x) = 3x^2 + 4x - 7$ et $q(x) = 2x - 5.$

1) Résoudre les équations $p(x) = 0$.
2) Faire un tableau de variation de $p(x)$ et tracer les graphes de $p(x)$ et $q(x)$.
3) Dans quels intervalles $p(x)$ est bijective.

Exercice 2. Calculer les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ où $f(x) = e^{2x} + x$ et $g(x) = \ln(x)$.

Exercice 3. Voir si les fonctions $f(x) = e^x + e^{-x}$ et $e^x - e^{-x}$ sot paires ou impaires.

Exercice 4. Soit a un réel. On définit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0 \\ x + a & si\ x < 0 \end{cases}$$

1) Calculer les limites à gauche et à droite de f en $x = 0.$ Pour Quelle valeur de a la fonction f est continue.
2) Tracer le graphe de f pour $a = 1$ et $a = 0.$
3) Pour $a = 0,$ étudier la dérivabilité de f en $x = 0.$

Exercice 5. Est-ce que la fonction définie par $f(x) = \left(\sqrt{x+4} - 2\right)/x$ et $f(0) = 1$ est continue en $x_0 = 0$?

Exercice 6. En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction f en x :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

calculer les dérivées des fonctions x^2 et $\sqrt{x}$.

Exercice 7. Utiliser la proposition suivante :

Proposition *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors, f est constante sur $[a, b]$.*

pour montrer que : 1) $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ pour $a, x > 0.$

2) $\arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $x \in [-1,1]$

Exercice 8. Calculez les dérivées des fonctions définies par :

1) $g_1(x) = x^3 \ln(2x^2 + 1)$ 2) $g_2(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$ 3) $g_3(x) = arctg(1/x)$

4) $g_4(x) = arcsin(\sqrt{x})$ 5) $g_5(x) = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$

Exercice 9. Soit $f(x) = x^2 e^x.$ Vérifier que $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x.$

Exercice 10. Montrer que l'équation $2x^3 + 3x = 1$ admet une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 11. Utiliser la règle de l'Hôpital pour calculer les limites :

1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^5 - x - 1}{3x^7 + x^2 - 4}$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} \ln(x)$ 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x}$.

Exercice 12. Utiliser l'intégration par parties : $\int U'V = UV - \int UV'$, pour calculer les primitives des fonctions :

$$f(x) = x^3 \ln(x), \qquad g(x) = x\, arctg(x) \quad \text{et} \quad h(x) = xe^{3x}.$$

Exercice 13. Calculer les intégrales :

1) $\int \frac{1}{4x^2 - 1} dx$ 2) $\int_5^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - 3x - 4} dx$ 3) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 5} dx$ (poser $t = e^x$) 4) $\int_1^4 e^{2\sqrt{x}} dx$ (poser $t = \sqrt{x}$)