FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1 Définition et exemples

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n),\ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$.

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ est dit n-uplet, en géométrie on dit un point de $\mathbb{R}^n$ il est vu aussi comme un vecteur.

Définition 1 *Une fonction numérique de n variables réelles est une application f d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note*

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

Ou bien

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \quad \text{ou } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

Exemple 1

1) $f(x, y) = x^3 + xy - y^2$, $D = \mathbb{R}^2$.

2) $g(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

3) La fonction surface $= xy$, volume $= xyz$.

4) L'allométrie est l'étude des échelles de relations entre une partie du corps et le corps dans son ensemble. Une relation allométrique entre la masse (M) et la longueur (L) du corps des poissons à la forme

$$M = aL^b$$

4) La fonction résistance d'un montage en parallèle de deux résistances x et y est donnée par

$$\frac{xy}{x + y}$$

2 Fonction de deux variables

2.1 Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction $f(x, y)$, noté D_f, est l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in \mathbb{R}\}.$$

En général, pour déterminer D_f on passe par les étapes suivantes :

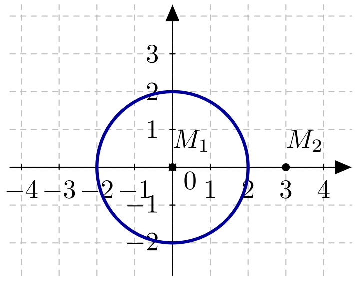
1) Ecriture du domaine.

2) Détermination des frontières.

3)Représentation graphique et détermination des régions qui constituent D_f en utilisant des points particuliers situés dans les régions.

Exemple 2

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



1) $D_f = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4 - x^2 - y^2 \geq 0$.

2) Détermination des frontières :

$4 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2$, cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 2$.

3) Le cercle divise le plan en deux régions, prenons deux points quelconques de ces deux régions. $M_1 = (0,0)$ et $M_2 = (3,0)$

Pour M_1 on a $4 - 0^2 - 0^2 \geq 0$

Pour M_2 on a $4 - 3^2 - 0^2 < 0$

Donc $D_f =$ le cercle et son intérieur=le disque fermé.

2.2 Limite et continuité

1. **Limite en $(0,0)$:**

Pour calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, la première étape consiste à remplacer x par 0 et y par 0, si on trouve un nombre ou ∞ c'est bon. Si on trouve une forme indéterminée alors il faut faire le changement de variable en coordonnées polaires suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

θ contrôle la direction, et donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Ou bien poser $y = tx$, ici t contrôle la direction, et alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,tx).$$

• Si la limite ne dépend pas de θ (ou t) et est finie on dit qu'elle existe.

• Si elle dépend de θ (ou t) ou bien n'est pas finie on dit qu'elle n'existe pas.

Exemple 3

1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y+2}{x+y+3} = \frac{2}{3}.$$

2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2x^2y}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad (FI)$$

Par le changement de variable en coordonnées polaires on trouve :

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^3+2(r\cos(\theta))^2(r\sin(\theta))}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(\cos^3(\theta)+2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\right)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3(\theta)+2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\right) = 0.$$

3)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad (FI)$$

Par le changement de variable en coordonnées polaires on trouve :

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^2+2(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(\cos^2(\theta)+2\cos(\theta)\sin(\theta)\right)}{r^2}$$

$$= \cos^2(\theta)+2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

Cette limite dépend de θ, donc elle n'existe pas.

4)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{0} \quad (FI)$$

Par le changement de variable $y = tx$ on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(tx)}{\sqrt{x^2+(tx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{tx^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+t^2}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x^2}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = 0.$$

5)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad (FI)$$

Par le changement de variable $y = tx$ on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(tx)}{x^2+(tx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{tx^2}{x^2(1+t^2)} = \frac{t}{1+t^2}.$$

Cette limite dépend de t, donc elle n'existe pas.

2. **Limite en** (x_0, y_0) **:**
   On pose $X = x - x_0$ et $Y = y - y_0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(X + x_0, Y + y_0).$$

Exemple 4

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y-3}{x^2+y-3} = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{(X+1)+(Y+2)-3}{(X+1)^2+(Y+2)-3} = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X+Y}{X^2+2X+Y}.$$

Maintenant par le changement $Y = tX$ *on obtient*

$$L = \lim_{X\to 0} \frac{X+tX}{X^2+2X+tX} = \lim_{X\to 0} \frac{1+t}{X+2+t} = \frac{1+t}{2+t}.$$

3. **Limite en** (x_0, ∞) **:**
   On pose $X = x - x_0$, $Y = 1/y$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\infty)} f(x,y) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(X + x_0, 1/Y).$$

Exemple 5

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,+\infty)} y \ln\left(x + \frac{1}{y}\right) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{\ln(X+1+Y)}{Y}.$$

En posant $Y = tX$ *on obtient*

$$L = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(X+1+tX)}{tX} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+(1+t)X)}{tX} = \frac{1+t}{t}.$$

4. **Limite en** (∞, ∞) :
   On pose :$X = 1/x$ et $Y = 1/y$.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(1/X, 1/Y).$$

Exemple 6

$$L = \lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} x \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{\sin(X+Y)}{X}.$$

En posant $Y = tX$ *on obtient*

$$L = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X+tX)}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin((1+t)X)}{X} = 1 + t.$$

Continuité : f est continue en (x_0, y_0) si :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Exemple 7 *Etudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On a par le changement $y = tx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(tx)}{x^2+(tx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{tx}{1+t^2} = 0 = f(0,0).$$

Donc f est continue en $(0,0)$.

2.3 Dérivées partielles

On commence par donner la définition pour le cas général.

Définition 2 *La dérivée partielle de la fonction à n variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ par rapport à la variable x_k (où $k = 1, ..., n$), est la dérivée de la fonction*

$$x_k \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)$$

de la variable x_k, en considérant toutes les autres variables x_j comme des constantes (ou paramètres) .
Cette dérivée partielle de f par rapport à x_k reste une fonction à n variables et elle est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Exemple 8 *Les dérivées partielles de la fonction :*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 5x_2^3 + \ln(x_3x_4) + x_1x_2$$

sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 15x_2^2 + x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{1}{x_3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{1}{x_4}$$

Exemple 9 *Les dérivées partielles d'une fonction à trois variables $f(x, y, z)$ sont notées par :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Pour $f(x, y, z) = xe^{2z} + \ln(xyz)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2z} + \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xe^{2z} + \frac{1}{z}.$$

Exemple 10 *Pour la fonction à deux variables $g(x, y) = x^2 + xy^2 + 3y^3 + e^{xy}$ on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 + ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 9y^2 + xe^{xy}.$$

Maintenant on donne la définition des dérivées partielles secondes pour une fonction à deux variables.

Définition 3 *Les dérivées partielles secondes de la fonction à deux variables $f(x, y)$ sont les dérivées partielles des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On énumère quatre :*

1) la dérivée partielle seconde par rapport à x notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

2) la dérivée partielle seconde par rapport à y notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

3) la dérivée partielle seconde par rapport à x et puis y notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

4) la dérivée partielle seconde par rapport à y et puis x notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Exemple 11 *Pour la fonction $g(x, y) = x^2 + xy^2 + 3y^3 + e^{xy}$ de l'exemple 10 on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 18y + x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y + (xy + 1)e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + (xy + 1)e^{xy}$$

Theorem 1 *Si en un point (x, y) les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

2.4 Points critiques et extremums

Définition 4 *Un point critique pour une fonction f à deux variables est un couple (x, y) vérifiant*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Définition 5 *Un point (x_0, y_0) est un maximum local de f, s'il existe un intervalle $]a, b[$ tel que,*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall x, y \in \,]a, b[\,.$$

Définition 6 *Un point (x_0, y_0) est un minimum local de f, s'il existe un intervalle $]a, b[$ tel que,*

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall x, y \in \,]a, b[\,.$$

Theorem 2 *Si une fonction f admet un minimum ou un maximum local en un point (x, y), alors ce point est un point critique.*

Theorem 3 *Soit (x_0, y_0) un point critique d'une fonction à deux variables f, on note :*

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

et

$$W = RT - S^2.$$

Alors

1) Si en (x_0, y_0) on a $W > 0$, f admet en (x_0, y_0) un maximum si $R < 0$ et un minimum si $R > 0$.
2) Si en (x_0, y_0) on a $W < 0$, f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0). On parle de point selle.
3) Si en (x_0, y_0) on a $W = 0$, on ne peut pas conclure.

Exemple 12 *Etudier l'existence d'extremums de la fonction*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y.$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3, \quad R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Les points critiques sont solutions du système

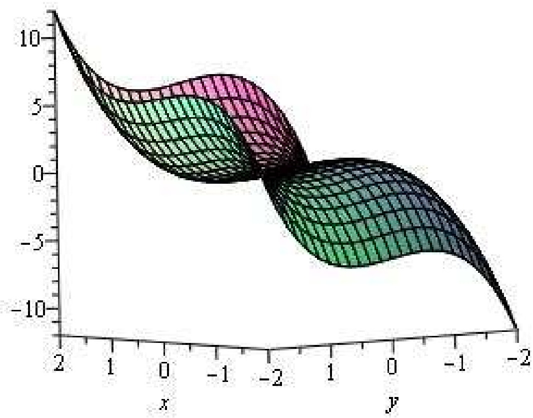
$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

On a donc 4 points critiques qui sont

$$M_1 = (1,1), \quad M_2 = (1,-1) \quad M_3 = (-1,1) \quad M_4 = (-1,-1).$$

Appliquons le Théorème 3 en ces points :

1) *En* $M_1 = (1,1)$ *on a :* $W = RT - S^2 = 36 > 0$ *et* $R = 6 > 0$. *Donc, la fonction* f *admet un minimum en* M_1.
2) *En* $M_2 = (1,-1)$ *et* $M_3 = (-1,1)$ *on a :* $W = RT - S^2 = -36 < 0$. *Donc,* f *n'admet d'extremum en aucun de ces deux points.*
3) *En* $M_4 = (-1,-1)$ *on a :* $W = RT - S^2 = 36 > 0$ *et* $R = -6 > 0$. *Donc,* f *admet un maximum en* M_4.



Extremums de $\boldsymbol{f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y}$

2.5 La différentielle

Définition 7 *La différentielle au point (x, y) d'une fonction à deux variables f est l'expression*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

De façon plus générale la différentielle au point $(x_1, x_2, ..., x_n)$ d'une fonction f à n variables est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k.$$

La différentielle est utilisée pour le calcul des erreurs. Pour une fonction $z = f(x, y)$, la question est : Quelle est l'erreur commise sur z connaissant les erreurs commises sur x et y ?
Notons par Δx, Δy et Δz les erreurs commises sur x, y et z. Ces erreurs sont positives et on a l'écriture : $x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$ et $z \pm \Delta z$. D'après la différentielle de f on a : (Δz est considérée comme étant l'erreur maximale commise sur z)

$$\Delta z = |\frac{\partial f}{\partial x}|\Delta x + |\frac{\partial f}{\partial y}|\Delta y.$$

Exemple 13 *La surface d'un rectangle de cotés x et y est $S = xy$. L'erreur ΔS est donnée par :*

$$\Delta S = |\frac{\partial S}{\partial x}|\Delta x + |\frac{\partial S}{\partial y}|\Delta y = |y|\Delta x + |x|\Delta y.$$

Si $x = 10 \pm 0,1$ et $y = 20 \pm 0,2$ alors

$$\Delta S = (20)(0,1) + (10)(0,2) = 4.$$

Si l'unité est le mètre, alors $S = 200 \pm 4m^2$. Ceci nous avise que en cas de vente de ce lot de terrain (en commettant ces erreurs) avec un prix (par exemple) de $50\,000 DA$ le m^2 on aura une perte de $200\,000 DA$.